Калибровка Лоренца.

Величины E и H мы можем померить экспериментально (просто померив электрическую и магнитную силы), они определены однозначно. Иная ситуация с φ и A.

Напомню, откуда вообще взялись эти потенциалв. Вот есть у нас система из 4 уравнений Максвелла относительно E и H:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

Мы отчаянно пытаемся её решить. Но это система многомерных дифуров, сложнааааааа. По курсу ММФ вы знаете, что один многомерный дифур способен причинить многаааа страданий, а тут их четыре. Поэтому физики говорят: вместо E и H мы будем искать φ и A.

Если div H =0 и дивергенция любого ротора есть 0, то логично предположить, что H является ротором чего-то. Это чего-то назвали векторным потенциалом A.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

Если H = rot A, то уравнение div H=0 выполняется автоматически! Уже минус уравнение. Чтобы полностью избавиться от H, H=rot A подставляют также в ур-е rot E=… . Получим

$$\operatorname{rot}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right\} \equiv 0.$$

Мы хотим, чтобы это ур-е выполнялось автоматически. Введём ещё один потенциал, скалярный:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}, t)$$

Ведь ротор от любого градиента – 0.

В итоге старые переменные через новые:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

В итоге из 4 уравнений у нас останется два, потому что ещё два будут выполнены автоматически благодаря тождествам из матана-3 «дивергенция ротора ноль, ротор градиента ноль».

Однако φ и A определены неоднозначно. φ определён с точностью до любой функции времени (но не координаты), A определён с точностью до градиента произвольной скалярной величины Ψ.

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\psi,$$

$$\varphi \to \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

Как нам определить φ и A так, чтобы формулы для них были наиболее красивыми?

Оказывается, что наиболее удачной оказывается т.н. калибровка Лоренца:

H = rot **A**

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Т.е. мы сначала из первого уравнения определяем A, потом из второго, уже зная A, определяем φ.

Почему такая калибровка удобна? Во-первых, мы получаем для φ и A точно такие же волновые уравнения, как и для E и H:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -4\pi\rho(t, \bar{r})$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -4\pi j(t, \bar{r})$$

Это очень хорошие уравнения, потому что переменные разделились. Каждое из них мы можем решить по отдельности, найти φ и A, а из них уже E и H. А во-вторых, преобразования Лоренца, как говорят, лоренц-инвариантны. Перевожу на русский: они очень хорошо вписываются в СТО. В частности, именно φ и A из преобразований Лоренца можно объединить в 4-вектор и написать потом все дальнейшие СТОшные уравнения.

Вывод интенсивности дипольного излучения.

План:

1) Получим формулы для φ и A

2) Получим формулы E и H

3) Воспользуемся формулой потока мощности через вектор Пойтинга [E x H] и получим угловое распределение мощности

4) Интегралом по всем углам найдём полную мощность.

Шаг 1. Получение формул для φ и A.

Получаются они из потенциалов Лиенара-Вихерта, к которым применяется дипольное приближение. Это самый противный этап, даю конечный результат:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mathbf{n}\,\dot{\mathbf{d}}(\tau))}{cr},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr}.$$

Шаг 2. Теперь получим формулы для E и H (см. формулы для них из темы «калибровка Лоренца!). Для H формула проще: H = rot A. Вычисляем ротор:

Используя эти выражения, мы можем найти векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ для поля излучения. Учитывая, что grad $\tau = -\mathbf{r}/cr = -\mathbf{n}/c$, для напряженности магнитного поля будем иметь:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathrm{rot}\ \mathbf{A} = \left[\nabla\ \frac{\dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr}\right] = \left[\nabla\ \frac{1}{cr}\ \dot{\mathbf{d}}(\tau)\right] + \tag{21.2}$$

$$+\left[\mathrm{grad}\ \tau\ \frac{\ddot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr}\right] = \frac{1}{cr^2}\left[\mathbf{n}\ \dot{\mathbf{d}}(\tau)\right] - \frac{1}{c^2 r}\left[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}(\tau)\right].$$

Первым слагаемым обычно пренебрегают, потому что мы рассматриваем достаточно далёкие расстояния, и слагаемое с $1/r^2$ меркнет на фоне слагаемого с $1/r$.

Надо бы найти и электрическую напряжённость E. Это

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mathrm{grad}\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Подстановка скалярного и векторного потенциалов даст

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}(\tau)) - \ddot{\mathbf{d}}(\tau)}{c^2 r} = -\frac{\left[\mathbf{n}[\ddot{\mathbf{d}}(\tau)\,\mathbf{n}]\right]}{c^2 r}$$

Если мы сравним с формулой для H

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau)\,\mathbf{n}]}{c^2 r}$$

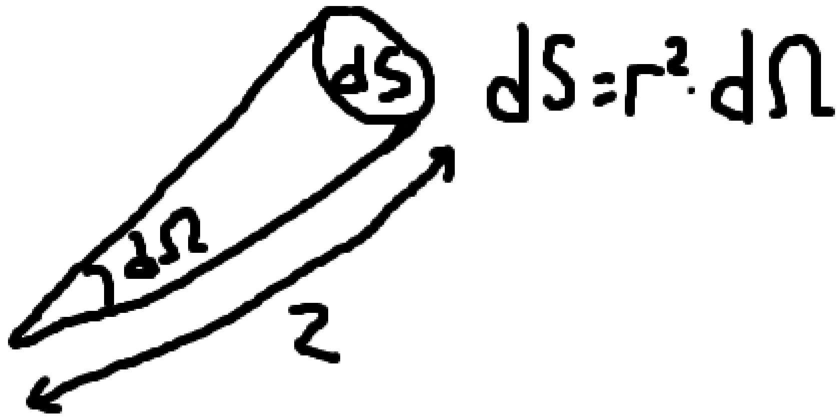
То видно, что $\mathbf{E} = -[\mathbf{n}\,\mathbf{H}].$ В дальнейшем мы этим воспользуемся.

Шаг 3. Ищем угловое распределение мощности.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi}\left(\mathbf{n}[\mathbf{E}\,\mathbf{H}]\right).$$

Эту формулу надо пояснить. [ExH] – вектор Умова-Пойтинга, показывающий, куда и с какой мощностью прёт энергия. Понятно, для чего

мы скалярно мы его умножаем на **n** – чтобы узнать долю мощности, идущую именно в направлении **n**.
Коэффициент с/4π СГСшный (в СИ его нет, там вместо него ε_0 и μ_0).
Осталось сказать, откуда взялось r^2. [ExH] – это мощность, делённая на площадь, через которую она проходит. А площадь эта $d\Omega * r^2$. Ну вот вы посмотрите на картинку:



Площадь, высекаемая конусом, равна телесному углу на квадрат радиуса. В частности, при телесному угле = 4π (это все возможные направления, предельно возможное значение телесного угла) получаем $4\pi r^2$.
 Если вам так проще, перенесите r^2 в знаменатель левой дроби, тогда он как раз преобразится в dS.
Чему равно (**n*[ExH])**? Опуская выкладки, скажу, что это H^2. Тут как нам раз пригодится, что $\mathbf{E} = -[\mathbf{n}\,\mathbf{H}]$., и если там раскрыть двойное векторное произведение и пошаманить, то получим H^2. А т.к. Н у нас

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau)\,\mathbf{n}]}{c^2 r}$$

То H^2 будет

$$\mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau)\,\mathbf{n}]^2}{c^4 r^2}.$$

И всё это надо домножить на какой-то коэф. Смотрим:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi}\left(\mathbf{n}[\mathbf{E}\,\mathbf{H}]\right).$$

, ага, на $cr^2/4\pi$.

Получаем

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau)\mathbf{n}]^2}{4\pi c^3}.$$

Шаг 4: проинтегрировать по телесному углу.

$$P = \int \left(\frac{dP}{d\Omega}\right) d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} \int [\ddot{\mathbf{d}}(\tau)\,\mathbf{n}]^2\, d\Omega$$

Основная сложность в раскрытии векторного произведения. $\ddot{\mathbf{d}}(\tau)$ – это некий вектор, он куда-то торчит. Чему равен модуль его векторного произведения? Модуль $\ddot{\mathbf{d}}(\tau)$ на синус угла между $\ddot{\mathbf{d}}(\tau)$ и нормалью **n**. Введём сферические координаты так, что направление вдоль $\ddot{\mathbf{d}}(\tau)$ будем считать осью z, а нормаль у нас будет пробегать все возможные значения. Тогда этот синус будет sin θ. Возводя в квадрат (т.к. векторное произведение возводится в квадрат), получим $\ddot{\mathbf{d}}^2 \sin^2\theta$. Ну и надо поделить на коэф пропорциональности $4\pi c^3$.

Тогда интеграл будет

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta.$$

Sin θ слева – от якобиана перехода в сферические координаты.

Взяв интеграл, и получим

$$P(t) = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}(t)^2}{3c^3}.$$

А интенсивность – это усреднение по времени.

Вывод порога реакции.

Здесь имеется в виду вот что. Предположим, у вас есть частицы с массами m1 и m2, и вы хотите в результате их столкновения получить частицу с массой $M>m_1+m_2$.

Естественно, вам для этого надо исходные частицы разогнать, чтобы их начальная охрененная кинетическая энергия перешла в массу. Как правило, одна покоится (мишень), а вот другую прям сильно разгоняют. Какую энергию надо придать налетающей частицы, чтобы родилась новая массивная? Эта кинетическая энергия и есть порог реакции.

Это задача 14.6 и она разобрана в СТО9. Для вашего удобства скопировал решение и в этот файл:
Решаем через инварианты: давайте подсчитаем псевдоквадрат нормы 4-импульса-энергии до столкновения в ЛСК, а после в СЦМ (как я и говорил). Почему именно так? Потому что в ЛСК мы знаем все начальные данные: 4-импульс 1-й и 2-й частиц

$$\left\{\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1\right\}, \ \left\{m_2 c, \vec{0}\right\}$$

В частности, искомая величина

$$W_k = E_1 - m_1 c^2$$

А после столкновения нам очень удобно считать ПКН в системе центра масс, потому что там будет одна частица с нулевым импульсом ☺ и энергией, равной энергии покоя. Собственно, это будет $[Mc^2]^2$ (это ПКН 4-энергии) или $(Mc)^2$ (это ПКН 4-импульса).

$$\left\{\frac{E_1}{c} + m_2 c, p_1\right\}^2 = (Mc)^2$$

Распишем псевдоквадрат нормы:

$$\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c\right)^2 - p_1^2 = (Mc)^2$$

Давайте избавимся от p_2, вспомнив, что $(m_1c)^2=(E_1/c)^2-p_1^2$ (связь энергии и импульса одной частицы в СТО, аналог $E=p^2/2m$ у Галилея, как выводится? И то, и то – ПКН 4-импульса, слева – в СК частицы, справа – в любой другой).

$$\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c\right)^2 - \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 + (m_1 c)^2 = (Mc)^2$$

$$2E_1 m_2 c + (m_2 c)^2 + (m_1 c)^2 = (Mc)^2$$

$$E_1 = \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m_2}$$

Если из этого мы ещё вычтем энергию покоя, то получим ответ:

$$\frac{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)c^2}{2m_2}$$

Чё такое нахрен дуальный тензор

Есть такой необычный тензор – Леви-Чевитты. Он аж четвёртого ранга.
В хороших СК (декартовых и инерциальных) тензор приобретает форму четырёхмерной матрицы, где элементы e[a][b][c][d] определяются по правилу:

1) если хоть два индекса равны - e[a][b][c][d]=0. Т.е e[0][0][1][2]=0. И e[3][2][0][3] тоже ноль. А вот e[2][1][3][0] нулём не будет.

2) если все индексы разные (т.е. это 0,1,2,3 в каком-то порядке), то есть две возможности:

if эта комбинация получается чётным числом перестановок соседних элементов (т.н. свапов) из 0,1,2,3
than e[a][b][c][d]=1, (т.н. чётная перестановка)
else e[a][b][c][d]=-1 (т.н. нечётная перестановка).

Потренируемся определять чётные и нечётные перестановки.
0, 1, 2, 3 – чётная перестановка, т.к. получается из 0,1,2,3 чётным числом свапов (0). Значит, e[0][1][2][3]=1.
0,1,3,2; 1,0,2,3; 0,2,1,3 – нечётные перестановки, т.к. получается из 0,1,2,3 нечётным числом свапов (1). Значит, e[0][1][3][2]= e[1][0][2][3]= e[0][2][1][3]=-1.
0,3,1,2 – чётная перестановка, т.к. получается из 0,1,2,3 чётным числом свапов: 0,1,2,3->0,1,3,2->0,3,1,2. Значит, e[0][1][3][2]=1.
А какой перестановкой будет 3,2,1,0? 0,1,2,3->0,1,3,2->0,3,1,2->3,0,1,2->3,0,2,1->3,2,0,1->3,2,1,0. Шесть свапов, это чётная перестановка. Значит, e[3][2][1][0]=1. А e[3][2][0][1], как вы понимаете, будет -1, там свапов будет всего пять.

Итак, с матрицей ЛЧ разобрались.

Итак, жил дважды верхний двензор. У него существует т.н. дуальный дважды нижний двензор. Чтобы его получить, надо свёрточно тензорно умножить исходный двензор на матрицу Леви-Чевиты со свёрткой по двум индексам. И ещё поделить пополам.

$$^{*}A_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{c,d} \varepsilon_{abcd} A^{cd}$$

А со звёздочкой – как раз дуальный двензор.
Т.е. хочешь найти одну из 16 его компонент, которая на пересечении a-той строчки и b-того столбца? Подсчитай 16 сумм в правой части и узнаешь ответ. Ну не совсем 16, там часть занулится из-за того, что в матрице Леви-Чевиты много нулей, но всё же.

Дуальный тензор есть и у дважды нижнего двензора:

$$^{*}A^{ab} = \frac{1}{2} \sum_{c,d} \varepsilon^{abcd} A_{cd}$$

Только там используется уже четырежды верхний тензор Леви-Чевитты, а не четырежды нижний. Отличий в матрицах, в прочем, ноль, так что вообще по барабану. Только следите, чтобы те индексы, которые в левой части сверху/снизу, были и в правой части сверху/снизу, а в правой «немые» индексы суммирования были поровну вверху и внизу.

Пример. Подсчитаем нулевую-нулевую компоненту дуального двензора к дважды верхнему двензору электромагнитного поля.
Пишем матрицу дважды верхнего двензора э/м поля:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$^*A_{00} = \frac{1}{2} \sum_{c,d} \varepsilon_{00cd} A^{cd}$$

Всё, дальше можно не считать, все символы Леви-Чевитты будут ноль и соответствующая компонента дуального двензора тоже зеро.
Вообще можно легко убедиться, что дуальный двензор будет антисимметричным, и в частности, на диагонали у него будут нули.

Подсчитаем лучше ноль-первую компоненту. Это будет

$$^*A_{01} = \frac{1}{2} \sum_{c,d} \varepsilon_{01cd} A^{cd}$$

Суммирование по c и d будет от 2 до 3, потому что иначе символ Леви-Чевитты будет ноль. Будет всего два слагаемых:

$$^*A_{01} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{0123} A^{23} + \varepsilon_{0132} A^{32} \right)$$

Смотрим на исходную матрицу. $A_{23}=-H_x$, $A_{32}=H_x$.
$e_{0123}=1$, $e_{0132}=-1$.
Подставляя всё это, получим $\frac{1}{2}(1*(-H_x)+(-1)*H_x)=-H_x$.
Вот и мы нашли ноль-первую компоненту дуального двензора.